Lycée pilote de Tunis	Devoir de synthèse N°1	Mr Bouguerra
Le 3 -12-2013	Mathématiques	Durée :3h 4M5

Feuille à rendre Nom et Prénom…………………………………

EXERCICE1(3points)

Cocher la bonne réponse

1) On considère la suite (U_n) définie sur IN^* par $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

☐ pour tout $n \in IN^*, U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ☐ la suite (U_n) est décroissante ☐ la suite (U_n) diverge vers $-\infty$

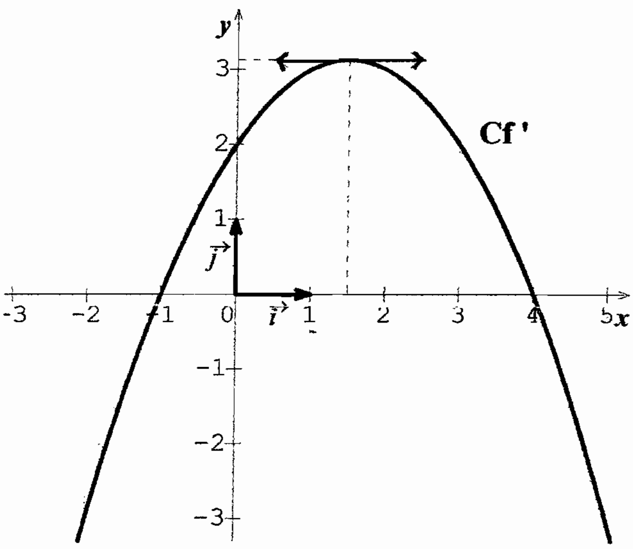
2) une isométrie qui laisse globalement invariant un triangle ABC de centre O alors

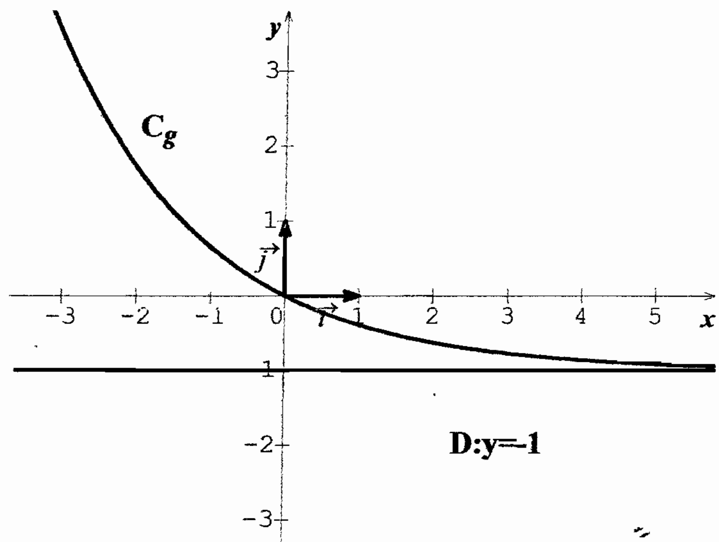
☐ f(O)= A ☐ f(O)= O ☐ f(O)= C

3) Soit f et g deux fonctions dérivables sur IR

On donne ci-dessous les courbes représentatives de deux fonctions f ' et g

Soit $\mathcal{C}_{gof}$ la courbe représentative de la fonction gof

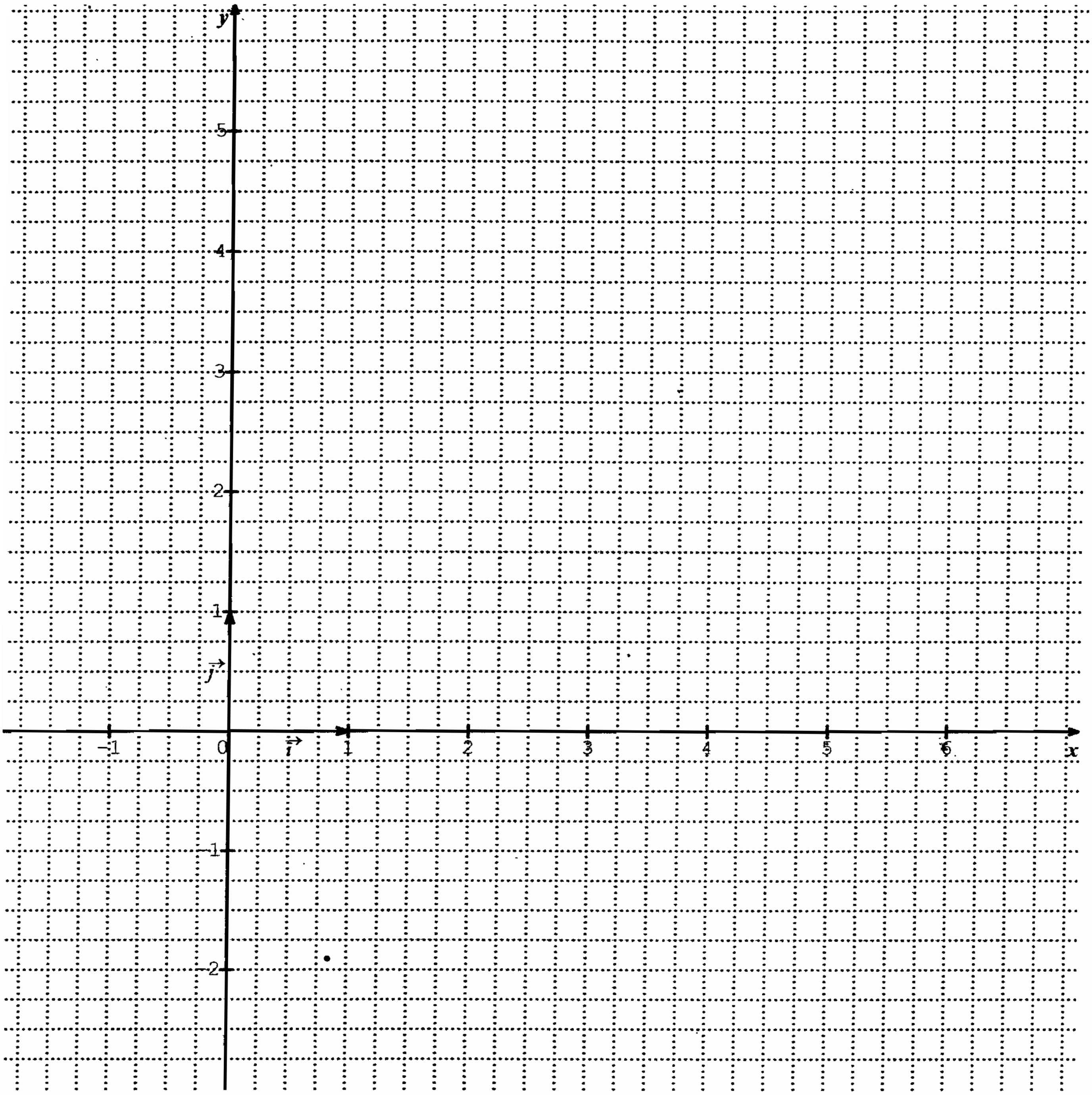




a)

☐ $\begin{cases}\text{la tangente à } \mathcal{C}_{gof} \text{ en point d'abscisse } (-1) \\ \text{est horizontale}\end{cases}$ ☐ $\begin{cases}\text{la tangente à } \mathcal{C}_{gof} \text{ en point d'abscisse } \frac{3}{2} \\ \text{est horizontale}\end{cases}$ ☐ fog admet un maximum en 4

b) ☐ gof est croissante sur [-1,4] ☐ fo g est croissante sur [-1,4] ☐ gof est décroissante sur [-1,4]



Annexe1

Lycée pilote de Tunis	Devoir de synthèse N°1	Mr Bouguerra
Le 3 -12-2013	Mathématiques	Durée :3h 4M5

EXERCICE2(7points)

Soit la fonction f définie sur $]-1,2]$ par : $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{1+x}}$

1) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{f(x)}{x-2}$ et interpreter graphiquement ce resultat

2)a) Montrer que f est dérivable sur $]-1,2[$ et que $f'(x) = \frac{-3}{2(1+x)^2\sqrt{\frac{2-x}{1+x}}}$.

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Construire la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (Annexe1)

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]-1,2[$sur l'intervalle J que l'on précisera

b) Montrer que pour tout x de J on a : $f^{-1}(x) = \frac{2-x^2}{1+x^2}$

c) Construire la courbe représentative (C') de f^{-1}dans le même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ une unique solution α dans $]-1,2[$ et que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

4) Soit la fonction g définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $\begin{cases} g(x) = f^{-1}(\tan(x)) & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} \\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \end{cases}$

a) Vérifier que pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ on a : $g(x) = -1 + 3\cos^2(x)$

b) Montrer que g réalise une bijection de$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,2]$

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]-1,2[$ et expliciter $(g^{-1})'(x)$

EXERCICE3(5points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé directe $(O,\vec{u},\vec{v})$

Soit θ un réel de$[0,2\pi]$ et l'equation (E) dans $\mathbb{C}$: $z^2 - 2(1 + i\sin\theta)z + 2\cos\theta - 1 + 2i\sin\theta = 0$

1) a) Résoudre l'équation (E)

b) Ecrire les solutions sous forme exponentielle lorsque $x = \frac{\pi}{3}$

2) Soit A , M_1 et M_2 trois points d'affixes respectives $z_A = 1,\ z_1 = e^{i\theta}$ et $z_2 = 2 - e^{-i\theta}$

a) Caractériser l'isométrie $\varphi = S_A o S_{(OA)}$ avec S_A : symétrie centrale de centre A

et $S_{(OA)}$ symétrie orthogonale d'axe (OA)

b) Montrer que $\varphi(M_1) = M_2$

c) Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}_1$ décrit par M_1puis l'ensemble $\mathcal{C}_2$ decrit par M_2 lorsque θ varie sur $[0,2\pi]$

3) Soit B un point d'affixe i , M un point d'affixe z et M'= $S_{(AB)}(M)$ et z' l'affixe de M'

a) Montrer que si M n'appartenant pas à (AB) alors $\frac{z'-1}{z'-i}$ et $\frac{z-1}{z-i}$ sont conjugués

b) Exprimer z' en fonction de $\overline{z}$

<u>EXERCICE 4</u>(5points)

Soit ABI un triangle équilatéral tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Soit Ω le symétrique de B par rapport à (AI)

Soit R la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui envoie A sur I

1) Montrer que Ω est le centre de R

2) Soit C=R(B) , montrer que I le milieu de [AC]

3) A tout point M de [AB] distinct de A et de B , on associe le point M' de [IC] tel que : AM=IM'

Montrer que le triangle ΩMM' est équilatéral

4) Soit O le milieu de [AI] , K le milieu de [BC] et H le milieu de [ΩC]

a) Montrer que qu'il existe un unique antidéplacement φ tel que φ(A)=I et φ(B)=C

b) Montrer que $\varphi = S_{(IC)} \circ R$

c) Construire I'= φ(I)

5)a) Caractériser φ

b) Soit g= $\varphi \circ S_{(IB)}$. Donner la nature et les éléments caractéristiques de g